ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 1

Задание 1.

Так как пешеход проходит 1 км за 10 минут, то его скорость будет 6 км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев слагается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 6$, относительная скорость обгоняющих $V - 6$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем:

$$\frac{V+6}{V-6} = \frac{700}{300} \to 3V + 18 = 7V - 42, \text{ т.е. } V = 15.$$

Ответ: 15 км/час.

Задание 2.

ОДЗ $x \neq 1$. Так как в области ОДЗ знаменатель отрицателен, то неравенство сводится к неравенству:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq -\sqrt{5}x.$$

При $x \geq 0$ это неравенство верно, при $x < 0$ получим:

$$x^2 - 2x + 2 \geq 5x^2.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $-1 \leq x \leq 0$.

Ответ: $-1 \leq x < 1, x > 1$.

Задание 3.

ОДЗ $x \neq \frac{\pi K}{3}$. Имеем:

$$cos^2x = sin^2 2x + \frac{\cos(2x+x)}{sin3x};$$

$$cos^2x = 4sin^2x\,cos^2x + \frac{cos2xcosx - sin2xsinx}{sin3x};$$

$$cos^2x(1-4sin^2x) = \frac{cosx(cos2x - 2sin^2x)}{sin3x};$$

$$cos^2x(1-4sin^2x) = \frac{cosx}{sin3x}(1-4sin^2x);$$

Значит $cosx = 0$ или $1 - 4sin^2x = 0$.

Отсюда находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Далее имеем:

$$cosxsin3x = 1.$$

Это равенство возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} cosx = 1 \\ sin3x = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} cosx = -1 \\ sin3x = -1 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что обе системы решений не имеют.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k; k, n \in \mathrm{Z}\right\}$.

Задание 4.

Переходя к основанию 2 в логарифмах, получим неравенство:

$$log_2(\frac{x^2}{2} + 4x + 9) \leq log_2\left[\left(\frac{x-5}{x+3}\right)\cdot(x+3)\cdot(x+2)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{2} + 4x + 9 \leq x^2 - 3x - 10.$$

Значит $x^2 - 14x - 38 \geq 0$. Решая это неравенство, получим:

$$x \leq 7 - \sqrt{87} \text{ и } x \geq 7 + \sqrt{87}.$$

Находим ОДЗ: $\frac{x-5}{x+3} > 0; x^2 + 5x + 6 > 0 \rightarrow x < -3; x > 5$.

Поэтому ответ: $x < -3;\ x \geq 7 + \sqrt{87}$.

Задание 5.

Построение графика разобьем на три этапа. Вначале строим график $y_1 = x + \frac{1}{x}$, затем график $y_2 = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$ и наконец график $y = (2^{y_2})^{-1}$.

Функция $x+\frac{1}{x}$ является функцией нечетной, поэтому достаточно рассмотреть этот график при $x>0$. Так как $x+\frac{1}{x}\geq 2$, то $min\, y_1 = 2$ при $x=1$. Функция $y=x+\frac{1}{x}$ имеет две асимптоты: вертикальная – ось y и наклонная $y=x$. Исходя из этого, график имеет вид (см. рис. 1):

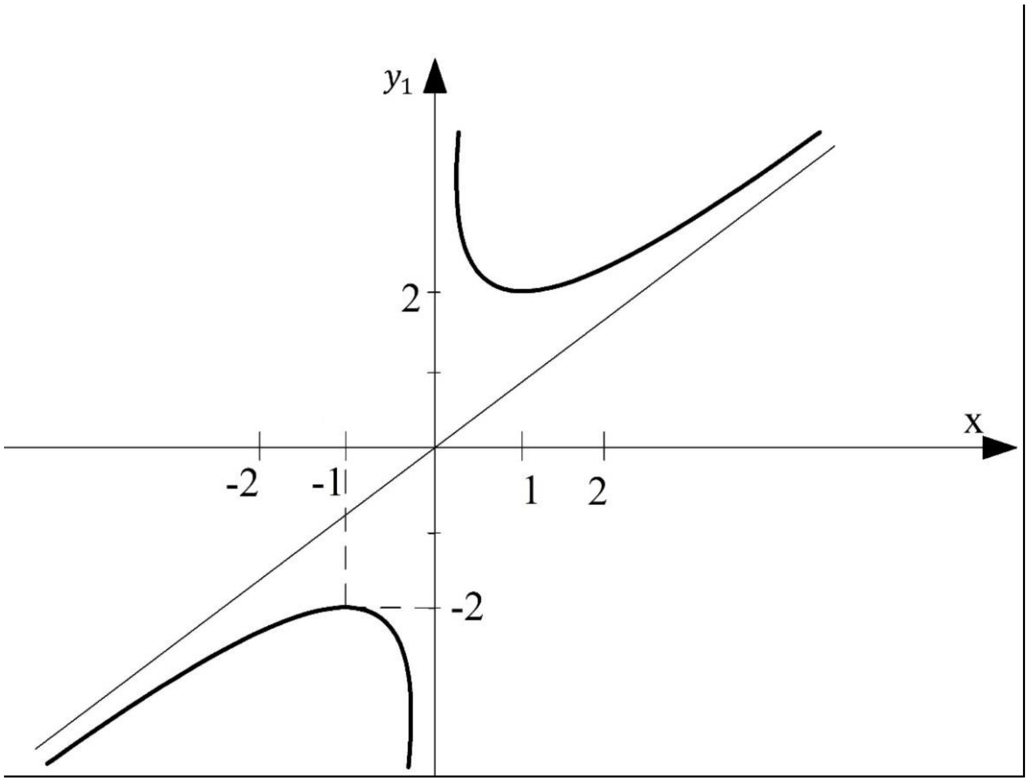


Рисунок 1

Далее строим график $y_2=\frac{1}{y_1}$. Получим (см. рис. 2), точка $x=0$ выколота:

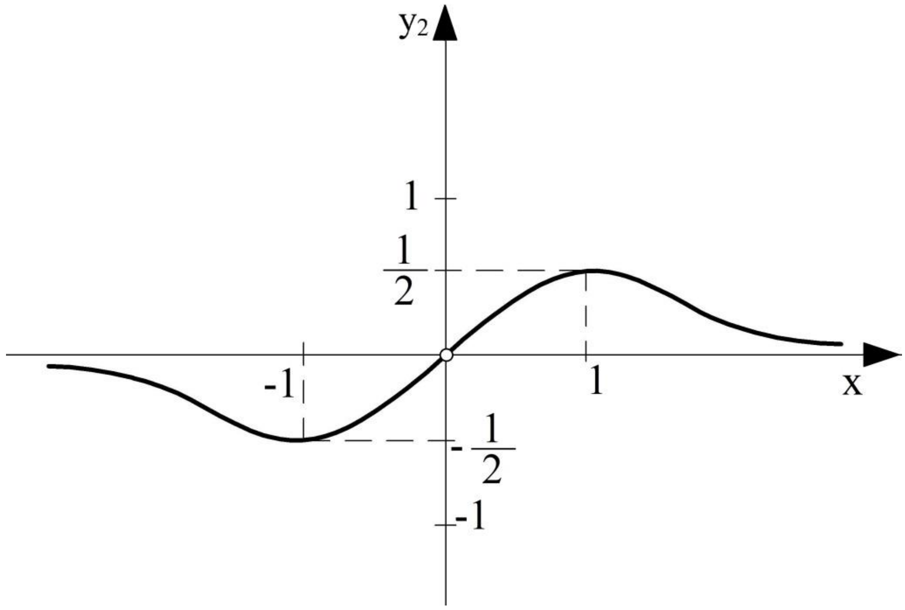


Рисунок 2

И наконец, строим график $y = (2^{y_2})^{-1}$ (см. рис. 3). По свойству показательной функции получится график с выколотой точкой с координатами $(0; 1)$.

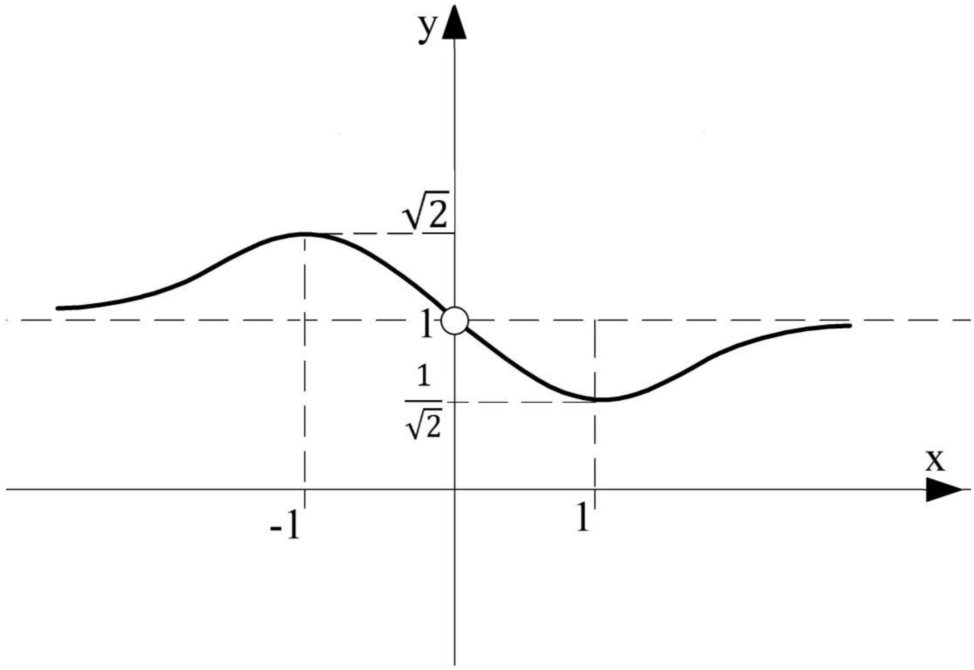


Рисунок 3

Задание 6.

Имеем:

$$x^2 - (y+2)^2 = 5, \qquad (x - y - 2) \cdot (x + y + 2) = 5$$

Так как x, y – целые числа, то равенство возможно в 4 случаях:

1) $\begin{cases} x - y - 2 = 5 \\ x + y + 2 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y - 2 = 1 \\ x + y + 2 = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y - 2 = -5 \\ x + y + 2 = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y - 2 = -1 \\ x + y + 2 = -5 \end{cases}$

Решая эти системы, найдем ответ: $\{(\pm 3; 0), (\pm 3; -4)\}$.

Задание 7.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 10 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0{,}05)^{10} \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 10 лет (т.е. 120 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{5}{12\cdot 100})^{120}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

$$1 + \frac{5}{100} < (1 + \frac{5}{12\cdot 100})^{12}.$$

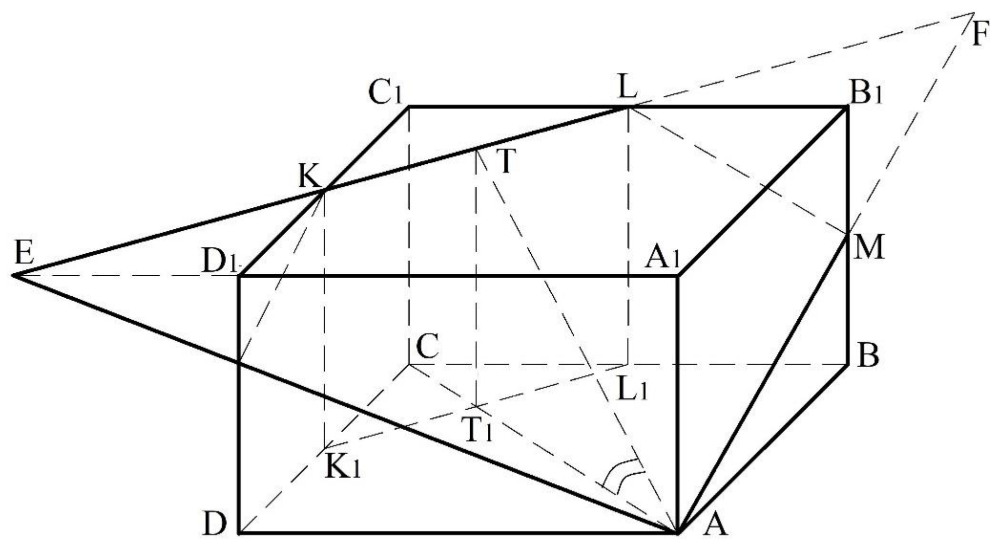
По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$1 + \frac{5}{12\cdot 100} \cdot 12 + \cdots = 1 + \frac{5}{100} + \cdots$, что очевидно больше первого числа.

Ответ: во втором случае больше.

Задание 8.

Строим сечение куба.



Прямая KL, где K середина D_1C_1, L – середина C_1B_1 лежит в плоской грани $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому она пересекает продолжение ребер A_1B_1 и A_1D_1 соответственно в точках F и E. Легко подсчитать, что $D_1E = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{3}A_1E$.

Аналогично $B_1F = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{3}A_1F$. Так как точки E и A лежат в одной грани. Нетрудно показать, что прямая AE пересекает ребро DD_1 в точке N и делит это ребро в отношении $2:1$. Аналогично прямая AF пересекает ребро B_1B в точке M и тоже делит это ребро в отношении $2:1$. Следовательно, сечение будет пятиугольник AMLKN. Его проекцией на нижнее основание будет пятиугольник ABL_1K_1D. Площадь этого пятиугольника будет равна $\frac{7}{8}$.

Если T – середина KL и T_1 проекция т. T на нижнее основание, то угол TAT_1 будет углом между сечением и нижней гранью куба. Тогда $\cos(TAT_1) = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Воспользуемся формулой для площади проекции, получим, что площадь сечения будет равна: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{17}}{24}$.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

Скорость пешехода равна 5км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев слагается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 5$, относительная скорость обгоняющих $V - 5$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем равенство:

$$\frac{V+5}{V-5} = \frac{600}{225} \to V = 11 \text{ км/час}.$$

Ответ: 11 км/час.

Задание 2.

$\frac{3x+3}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \leq 1 \to$ ОДЗ $x \neq 1$ и $3 - \sqrt{(x-1)^2+9} \leq 0$. Поэтому имеем:

$$\frac{3x+3-3+\sqrt{(x-1)^2+9}}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \leq 0.$$

Так как знаменатель не положителен, то получим:

$$\sqrt{(x-1)^2+9} + 3x \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+9} \geq -3x.$$

Если $x \geq 0$, то неравенство верно.

Если же $x < 0$, то $x^2 - 2x + 10 \geq 9x^2, 4x^2 + x - 5 \leq 0, -\frac{5}{4} \leq x \leq 1.$

А тогда ответ: $-\frac{5}{4} \leq x, x \neq 1.$

Задание 3.

ОДЗ $sin3x \neq 0, x \neq \frac{\pi k}{3}$.

$$sin^2 2x = cos^2 x + \frac{cos\,3x}{sin3x}$$

$$4sin^2 x cos^2 x - cos^2 x = \frac{cos(2x + x)}{sin3x}$$

$$cos^2 x(4sin^2 x - 1) = \frac{cos\,2xcosx - sin2xsinx}{sin3x} = \frac{cos^2 x(cos2x - 2sin^2 x)}{sin3x} =$$

$$= \frac{cos\,x(1 - 4sin^2 x)}{sin3x}.$$

Поэтому $\left[\begin{array}{c} cosx = 0 \\ 1 - 4sin^2 x = 0 \end{array}\right.$ или $sin3xcosx = -1$.

Значит, решение будет: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} sin3x = -1 \\ cosx = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} sin3x = 1 \\ cosx = -1 \end{cases}$$

Эти системы не имеют решений.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k, n \in Z\right\}$.

Задание 4.

Переходя к основанию 7 в логарифмах, получим:

$$-log_7\left(\frac{x-1}{x-9}\right) \leq -log_7\left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51\right) + log_7(x^2 - 17x + 72);$$

$$log_7(x^2 - 17x + 72) \geq log_7\left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51\right) - log_7\left(\frac{x-1}{x-9}\right);$$

$$x^2 - 17x + 72 \geq \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51\right) \cdot \left(\frac{x-9}{x-1}\right);$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51\right) \cdot \left(\frac{x-9}{x-1}\right) - (x-8) \cdot (x-9) \leq 0$$

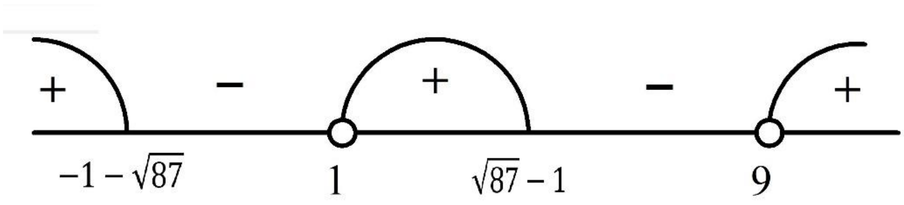
$$(x-9) \cdot \left(\frac{\frac{x^2}{2} - 10x + 51}{x-1} - (x-8)\right) \leq 0$$

$$\frac{x-9}{x-1}\cdot\left(\frac{x^2}{2}-10x+51-x^2+8x+x-8\right)\le 0$$

$$\frac{x-9}{x-1}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}-x+43\right)\le 0$$

$$\frac{(x^2+2x-86)\cdot(x-9)}{(x-1)}\ge 0$$

Решаем методом интервалов:

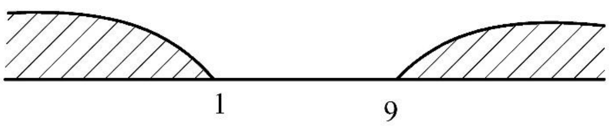


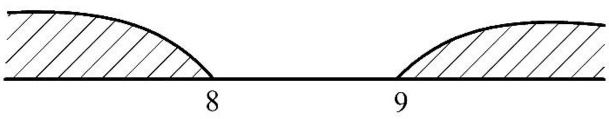
Находим ОДЗ: так как $\frac{x^2}{2}-10x+51>0$ для любого x, то:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-9}>0 \\ x^2-17x+72>0 \end{cases}$$

$$(x-1)(x-9)>0$$

$$(x-8)(x-9)>0$$





Отсюда ОДЗ: $x>9; x<1$.

Следовательно, ответ: $x\le -1-\sqrt{87}; x>9$.

Задание 5.

Так как $|-x|=|x|$, то функция $y=2^{\frac{1}{\frac{1}{|x|}-|x|}}$ четная. Значит достаточно простроить график для $x>0$. Строим в начале график $y_1=\frac{1}{x}-x$ для $x>0$.

Этот график имеет две асимптоты: вертикальная – ось OY и наклонная $y = -x$ при $x = 1, y_1 = 0$. Находим производную $y_1' = -\frac{1}{x^2} - 1$. Видим, что y_1' везде отрицателен, значит, функция монотонно убывает. Поэтому график имеет вид (рис. 1):

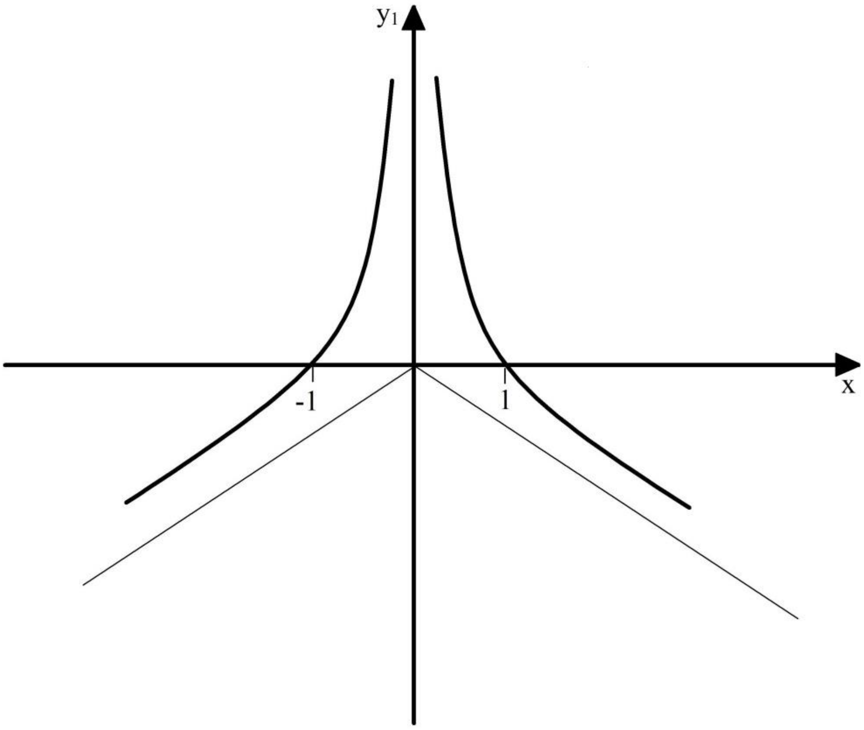


Рисунок 1

Далее строим график $y_2 = \frac{1}{y_1}$. Так как при $x \to 0\, y_1 \to \infty$, то $y_2 \to 0$ при $x \to 1\, y_1 \to 0$, , следовательно, $x = 1$ – точка разрыва 2 рода (бесконечный разрыв). Вследствие этого получим график y_2 (рис. 2):

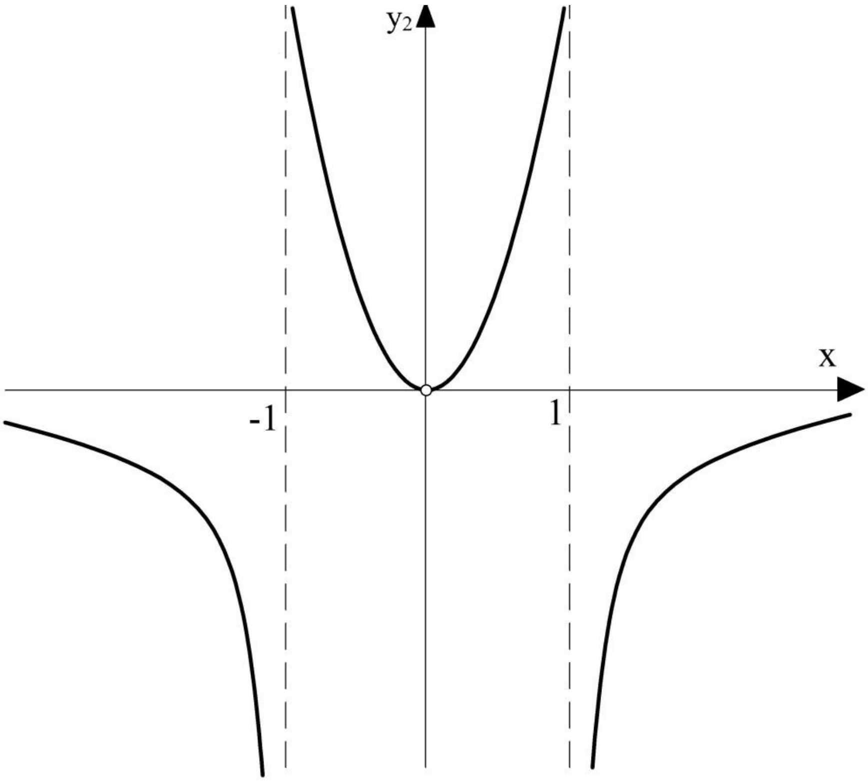


Рисунок 2

Исходя из этого графика, наконец, получим график $y = 2^{y_2}$ (рис. 3):

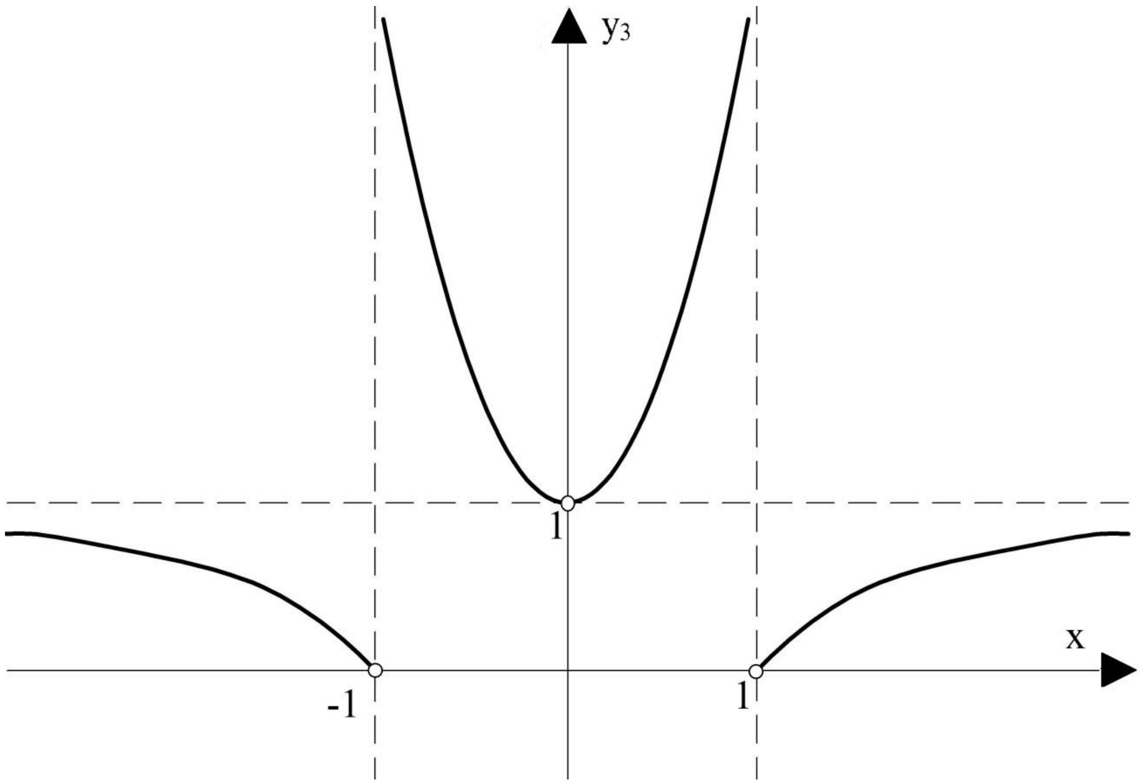


Рисунок 3

В точке (0,1) имеем разрыв $I^{\text{го}}$ рода. При $x \to \pm\infty$ $y_3 \to 1$.

Задание 6.

$$4x^2 = y^2 + 2y + 1 + 3;$$

$$(2x)^2 - (y+1)^2 = 3;$$

$$(2x - y - 1) \cdot (2x + y + 1) = 3.$$

Так как x, y – целые числа, то получим:

1) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 1 \\ 2x + y + 1 = 3 \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 3 \\ 2x + y + 1 = 1 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x - y - 1 = -3 \\ 2x + y + 1 = -1 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x - y - 1 = -1 \\ 2x + y + 1 = -3 \end{cases}$

Из первой системы: $x = 1, y = 0$

Из второй системы: $x = 1, y = -2$

Из третьей системы: $x = -1, y = 0$

Из четвертой системы: $x = -1, y = -2$

Ответ: $\{(1,0), (1,-2), (-1,0), (-1,-2)\}$.

Задание 7.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 5 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0{,}03)^5 \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 5 лет (т.е. 60 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{3}{12 \cdot 100})^{60}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

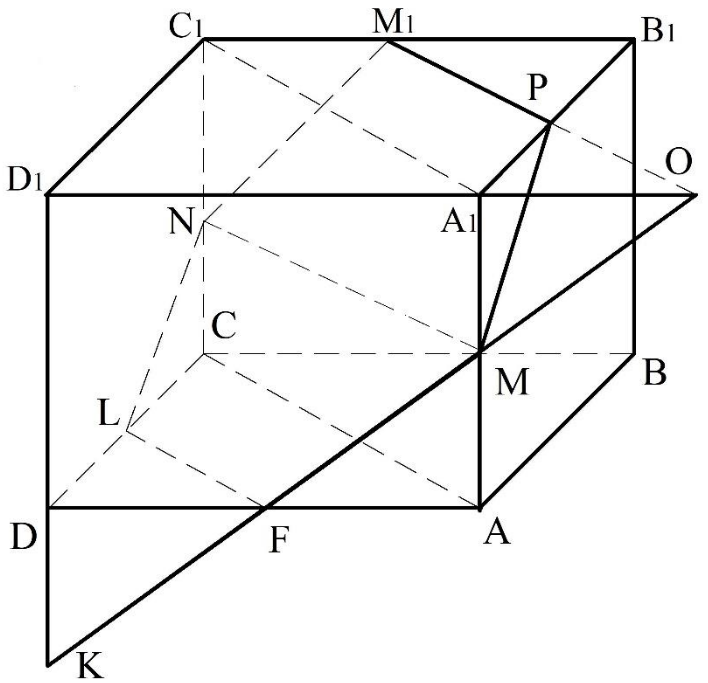
$$1 + \frac{3}{100} < (1 + \frac{3}{12 \cdot 100})^{12}.$$

По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$1 + \frac{3}{12 \cdot 100} \cdot 12 + \cdots = 1 + \frac{3}{100} + \cdots$, что очевидно больше $1 + \frac{3}{100}$.

Ответ: во втором случае больше.

Задание 8.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный куб со стороной 1. Соединим точку K с серединой стороны A_1A в точке M. Тогда $DF = FA = \frac{1}{2}$, пусть N – середина CC_1. Продолжим FM до пересечения с $D_1\,A_1$ в точке O. Так как плоскость сечения проходит через $NM \parallel CA$ и $NM \parallel A_1C_1$, то плоскость сечения пересекает основание $DCBA$ по прямой $\parallel CA$. Значит FL, где L – середина DC будет лежать в плоскости сечения. Далее из точки N проведем прямую параллельную FM, которая очевидно пересекает C_1B_1. в некоторой точке M_1. Отрезок M_1O лежит в плоскости верхнего основания. Поэтому M_1O пересекает A_1B_1 в середине A_1B_1 в некоторой точке P, которая делит A_1B_1 пополам. Соединяя точку P с точкой M получим искомое сечение куба. Очевидно, что данное сечение есть правильный шестиугольник со стороной равной $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому площадь сечения будет равна $6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 3

Задание 1.

Скорость пешехода равна 4 км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев слагается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 4$, относительная скорость обгоняющих $V - 4$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем:

$$\frac{V+4}{V-4} = \frac{800}{400} \rightarrow V = 12 \text{ км/час.}$$

Ответ: 12 км/час.

Задание 2.

Под корнем стоит выражение $(x-2)^2 + 1 \geq 1$ для любого x. Находим, что ОДЗ $x \neq 2$

Так как знаменатель левой части неравенства всегда отрицателен, то получим, что $x\sqrt{2} + 1 - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 0$.

Отсюда $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq -\sqrt{2}x$.

Для всех $x \geq 0$ неравенство верно. При $x \leq 0$ получим $x^2 - 4x + 5 \geq 2x^2,\ x^2 + 4x - 5 \leq 0,\ (x+5)\cdot(x-1) \leq 0,\ -5 \leq x \leq 0$.

Тогда ответ: $x \geq -5, x \neq 2$.

Задание 3.

Обозначим $2x = t$, тогда $cos^2 t + cos^2 2t = 1 + ctg 3t$.

ОДЗ $sin3t \neq 0, 3t \neq \pi k$.

$$cos^2 t = sin^2 2t + \frac{\cos(2t + t)}{sin3t};$$

$$cos^2 t = 4cos^2 t\, sin^2 t + \frac{cos2tcost - sin2tsint}{sin3t};$$

$$cos^2 t \cdot (1 - 4sin^2 t) = cost \cdot (1 - 4sin^2 t).$$

Отсюда: $cost = 0;\ 1 - 4sin^2 t = 0$.

Поэтому $sint = \pm\frac{1}{2}, t = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. Далее имеем $cost\, sin3t = 1$.

Это возможно если:

$$\begin{cases} cost = 1 \\ sin3t = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} cost = -1 \\ sin3t = -1 \end{cases}.$$

Обе системы решений не имеют.

Возвращаясь к старой переменной x, получим ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

Задание 4.

Переходя в логарифмах к основанию 5, получим:

$$-log_5\left(\frac{x+3}{x-5}\right) + log_5\left(\frac{x^2}{2} - 6x + 19\right) \leq log_5(x^2 - 9x + 20);$$

Значит $\frac{x^2}{2} - 6x + 19 \leq (x^2 - 9x + 20) \cdot \left(\frac{x+3}{x-5}\right) = (x - 4) \cdot (x + 3)$.

Отсюда имеем неравенство:

$$\frac{x^2}{2} - 6x + 19 \leq x^2 - x - 12,$$

т.е. $x^2 + 10x - 62 \geq 0, x \leq -5 - \sqrt{87}, x \geq -5 + \sqrt{87}$.

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-5} > 0 \\ (x-4) \cdot (x-5) > 0 \end{cases} \rightarrow x < -3, x > 5.$$

С учетом ОДЗ ответ: $x < -5 - \sqrt{87}, x > 5$.

Задание 5.

$$y = 4^{\frac{\frac{1}{4}}{x} + x}$$

Вначале строим график $y_1 = \frac{4}{x} + x$

Очевидно, что функция y_1 будет нечетной, значит график симметричен относительно начала координат. Так как $\frac{4}{x} + x \geq 4$, то при $x = 2$ $min\, y_1 = 4$. Функция y_1 имеет две асимптоты: вертикальная – ось OY и наклонная $y = x$. Поэтому график имеет следующий вид (рис. 1):

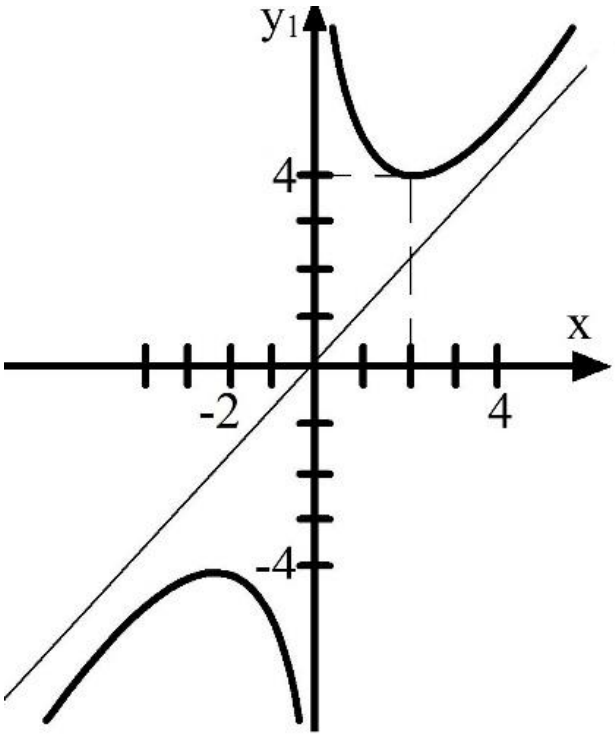


Рисунок 1

Далее строим график $y_2 = \frac{1}{y_1}$. В нуле этот график имеет точку разрыва (рис. 2):

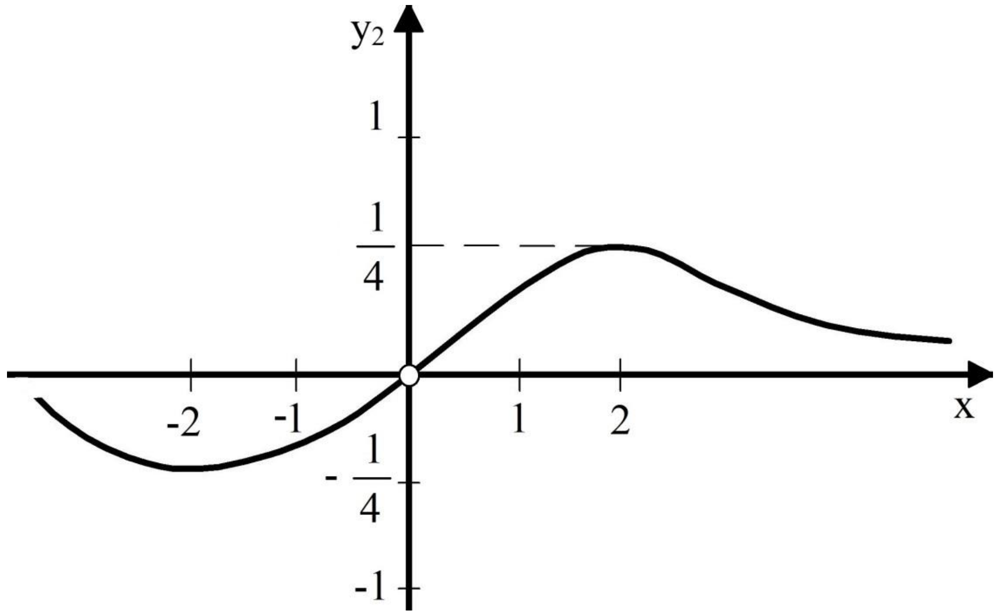


Рисунок 2

И наконец, строим график показательной функции $y = 4^{y_2}$ (рис. 3). Так как 4^{y_2} (при $y_2 \to 0$) стремится к 1, то имеем горизонтальную асимптоту $y = 1$. Из свойств показательной функции следует, что в точке $x = 2$ имеет максимум равный $\sqrt{2}$, в точке $x = -2$ имеем минимум, равный $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

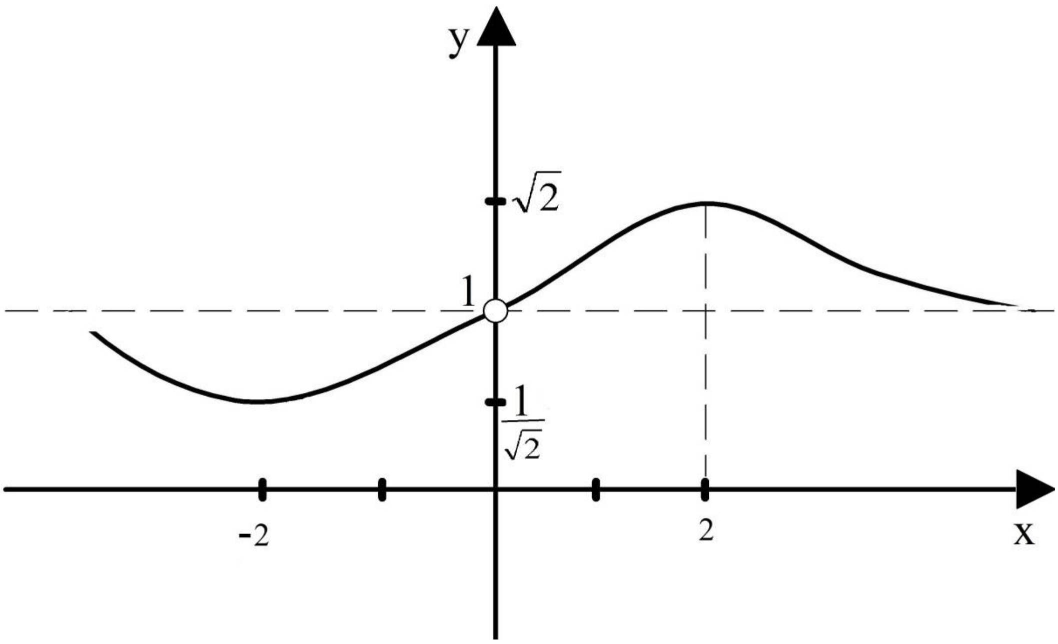


Рисунок 3

Исходя из этого, график $y = 4^{\frac{1}{x+\frac{4}{x}}}$ имеет вид (рис.3):

Задание 6.

$$x^2 = (y+1)^2 + 1, \qquad x^2 - (y+1)^2 = 1, \qquad (x-y-1)\cdot(x+y+1) = 1$$

Так как x, y – целые числа, то равенство возможно в двух случаях:

1)$\begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y+1=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases}$

Из первой системы находим, что $x = 1,\ y = -1$.

Из второй $x = -1,\ y = -1$.

Ответ: (1,–1),(–1;–1).

Задание 7.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 8 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0{,}04)^8 \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 8 лет (т.е. 96 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{4}{12\cdot 100})^{96}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

$$1 + 0{,}04 < (1 + \frac{4}{12\cdot 100})^{12}.$$

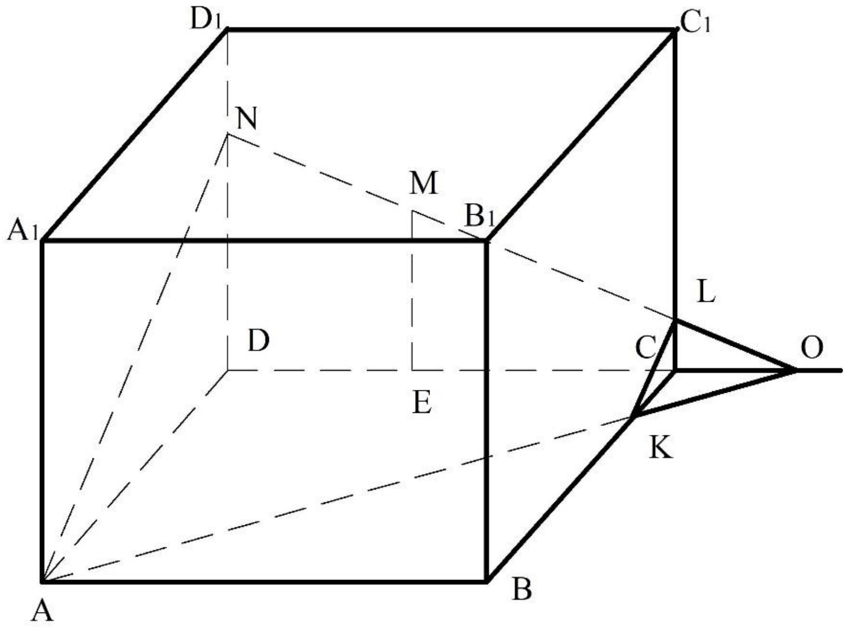
По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$1 + \frac{4}{12\cdot 100} \cdot 12 + \cdots = 1 + 0{,}04 + \cdots$, что очевидно больше $1 + 0{,}04$.

Ответ: во втором случае больше.

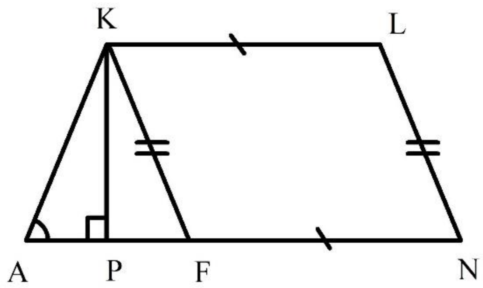
Задание 8.

Пусть K – середина ребра BC, M – центр грани DCD_1C_1. Так как точки A и K лежат в плоскости нижней грани, то прямая AK пересечет продолжение ребра DC в некоторой точке O. Треугольники ABK и KCO равны, поэтому $CO = AB = DC$ и $DO = 2DC$. Так как точки M и O лежат в плоскости грани DCD_1C_1 , то прямая MO пересекает ребра CC_1 и D_1D в некоторых точках L и N. Тем самым, сечение это четырехугольник $AKLN$, который является трапецией т.к. $AN \parallel KL$. Так как сторона куба равна 1, то из подобия треугольников легко находится, что $LC = D_1N = \frac{1}{3}, DN = \frac{2}{3}$.



По теореме Пифагора находим стороны трапеции $AN = \sqrt{1+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}, AK = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, KL = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}, NL = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

В трапеции $AKNL$ проведем прямую $KF \parallel LN$ и высоту трапеции KP. Так как $KL = \frac{1}{2}AN$, то $AF = FN = LK$.



По теореме косинусов имеем $KF^2 = (AK)^2 + (AF)^2 - 2AK\,AF cos\hat{A}$, то $cosA = \frac{3}{\sqrt{65}} \to sinA = \sqrt{\frac{56}{65}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$. А тогда $KP = \sqrt{\frac{14}{13}} \to S\text{трап} = \frac{1}{2}KP \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$